OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– FAZA PE SECTOR –
BUCUREŞTI 21.02.2004

Clasa a XII-a

Subiectul I

a. Să se calculeze integralele nedefinite:

$$\mathrm{I}_1=\int \frac{\sqrt{\sin^4 x+\cos^4 x}}{\sin^3 x\cdot\cos x}\mathrm{d}x,\ \mathrm{I}_2=\int \frac{\sqrt{\sin x^4+\cos^4 x}}{\sin x\cdot\cos^3 x}\mathrm{d}x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

I.V. Maftei, M. Nicolae

b. Fie $t\in\mathbb{R}$, ecuația $x^2+x+t=0$ cu rădăcinile x_1,x_2 şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(t)=|x_1|+|x_2|$.

i. Arătați că *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$.

ii. Calculați $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Sorin Rădulescu, Daniel Petriceanu

Subiectul II

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\sin x}{x},\ x\neq 0$ şi $f(0)=1$. Definim şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ prin

$x_1\in(0,\pi$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Vasile Dilimot-Niță

Subiectul III

a. Fie $(\mathrm{H}_1,*),(\mathrm{H}_2,\circ)$ două grupuri. Pe mulțimea $\mathrm{G}=\mathrm{H}_1\times\mathrm{H}_2$ definim operația $(x_1,x_2)\bullet(y_1,y_2)=(x_1*y_1,\ x_2\circ y_2)$. Să se arate că $(\mathrm{G},\bullet)$ este un grup.

b. Fie $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\ p\in\mathbb{N}$, *p* prim şi $k\in\mathbb{N},\ k>1$ exponentul lui *p* în descompunerea lui *n*. Să se calculeze numărul de soluții ale ecuației $x^{\frac{n}{p}}=\mathrm{e}$ în grupul $\mathrm{G}=\mathbb{Z}_{p^{k-1}}\times\mathbb{Z}_{\frac{n}{p^{k-1}}}$ unde e este elementul neutru al lui G.

***

Subiectul IV

Să se arate că există un morfism surjectiv de grupuri $f:\mathbb{Q}_+^*\to\mathbb{Q}$ între grupurile $(\mathbb{Q}_+^*,\bullet)$ şi $(\mathbb{Q},+)$.

Ion Savu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv 3 ore.
Subiectele se notează între 0 şi 7 puncte.